

Integración gráfica

La derivada y la integral son dos conceptos importantes en matemáticas. El entendimiento de su significado y la relación entre ambos operadores, así como la habilidad para realizar cálculos con ellos, potencian su aplicación en varias ramas del conocimiento de las ciencias naturales y exactas.

El primer encuentro con el cálculo diferencial e integral suele ser en la preparatoria, cuando los estudiantes escuchan, entre otros conceptos, las ideas de función, continuidad, punto de acumulación, límite, derivada e integral, aprenden a calcular la delta que corresponde a una ϵ arbitraria —tan pequeña como se quiera— y demuestran que un número específico efectivamente es el límite de cierta función cuando su variable independiente tiende a un valor determinado de su dominio.

También aprenden que la derivada de la función seno es el coseno, que $2x$ es la derivada respecto de x de x^2 , que la derivada de la función tangente es secante cuadrada.

Estas cosas “se saben” cuando se ha pasado por un curso de cálculo diferencial, independientemente de que el significado de las mismas no siempre se comprenda claramente.

Para derivar una función $f(x)$ que sea derivable, —porque no todas lo son o no lo son en todos los valores de x —, solamente se necesita memorizar y saber aplicar un conjunto de cuatro reglas de derivación básicas: suma, producto, división de funciones y la regla de la cadena; más otro conjunto de derivadas de funciones como: x^r , seno, coseno, exponencial y logarítmica.

Esperaríamos que si se le cuestiona a un estudiante de cálculo por qué $D[x^2]=2x$, conteste que es porque:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \right] &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \right] &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{2xh + h^2}{h} \right] &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} [2x + h] &= 2x\end{aligned}$$

También sería admisible si el alumno argumenta lo siguiente: porque la pendiente de la recta tangente a la curva $y=x^2$, en cualquier valor de x , es $2x$; por ejemplo, si $x=0.5$, entonces la recta tangente a la curva tiene pendiente uno, es decir, la inclinación de dicha recta es 45° .

Si se pide a un estudiante justificar que $D[\cos^2(x^3)]=6x^2\cos(x^3)\sin(x^3)$, lo más probable es que use el argumento de la pendiente de la recta tangente, pues difícilmente se encharcará en el cálculo del límite.

Calcular derivadas aplicando la definición puede convertirse en un problema algebraico y aritmético; sin embargo, afortunadamente, conociendo las reglas de derivación que se mencionaron antes, lo único que debe preocuparnos para obtener la derivada de una función $f(x)$ es observar el cumplimiento de la siguiente condición: si $f(x)$ es continua y suave (en donde suave significa sin picos en la gráfica de la función) en $[a, b]$, entonces



Gloria Rubí Vázquez, Adina Jordan Aramburo, Manuel Moreno Mercado y Sergio Pou Alberú

$D_x[f(x)]$ existe para toda $x \in [a, b]$.

Integrales

Respecto del cálculo de integrales definidas o indefinidas, el procedimiento común plantea encontrar la antiderivada o primitiva del integrando o función de la que se pretende integrar.

La mayoría de los textos básicos de cálculo mencionan algunas técnicas de integración (por partes, por sustitución de variable, por sustitución trigonométrica, mediante fracciones parciales), en todas ellas, la finalidad es representar el integrando de manera que su antiderivada pueda identificarse. En dichos textos se deducen las primitivas de varias funciones típicas, como seno y coseno, exponencial, algebraicas y polinomiales. Los profesores de cálculo integral invitan a sus estudiantes a realizar el mayor número de ejercicios de integración con el objetivo de que se vuelvan diestros en esto de calcular integrales.

¿Será que cuando un alumno dice que la integral de equis es un medio de equis cuadrada más la constante, realmente entiende lo que dice? En cambio si dijera que $D_x[(1/2)x^2 + c] = x$, nos preguntaríamos si existe alguna interpretación geométrica.

Una definición formal de integral es la de Bernhard Riemann (figura 1):

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

esto significa que el intervalo $[a, b]$ se ha partido en n pedacitos Δx_i ; x_i^* es algún valor de x que se encuentra en el i -ésimo pedacito correspondiente.

Es común pensar que para integrar es necesario saber derivar, pero la definición de integral indica que únicamente se requiere sumar y multiplicar, siempre y cuando la función sea continua o esté definida en trozos, en el intervalo de integración, que en este caso es $[a, b]$.

Es grato saber que no tenemos que emprender una búsqueda larga y tal vez engo-



rrosa por varios cambios de variables, una descomposición en fracciones parciales y rematar con una sustitución trigonométrica, hasta lograr expresar el integrando en tal forma que podamos identificar su primitiva. Podemos ser prácticos y evaluar una integral en el intervalo $[a, b]$, partiendo de la definición de Riemann, pero simulando el proceso de límite con un programa de cómputo.

Nos estamos refiriendo a la integración numérica, que permite calcular integrales con un excelente grado de precisión. En asignaturas sobre métodos numéricos aprendemos que existen varias reglas de integración numérica, como la de Simpson o la del trapecio; en cursos de programación desarrollamos habilidades para usar dichos métodos con el apoyo de una computadora obteniendo resultados aproximados, incluso mejorables, siempre y cuando el problema que tengamos que resolver lo solicite y

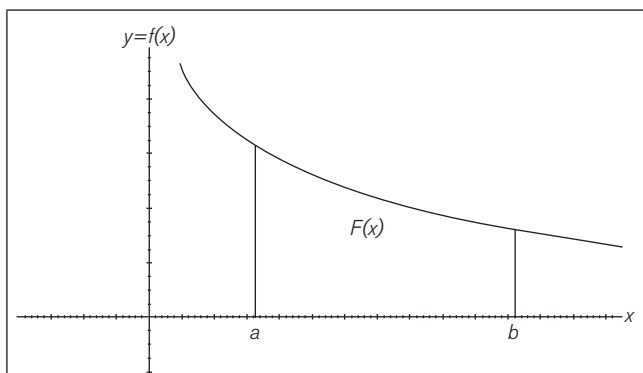


Figura 1. La gráfica de $\int_a^b f(x) dx = F(x)$ indica el área de la región del plano encerrada por la curva f , las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje horizontal.





las limitaciones de cómputo lo permitan.

En la figura 2 vemos que el área bajo la curva se ha seccionado en rectángulos y casi triángulos, es claro que la suma de las áreas de los polígonos se aproxima a la integral que se pretende calcular y también lo es que, si aumentamos el número de rectángulos, el cálculo del área será más fino y, por lo mismo, más cercano al valor real de la integral.

Actualmente con un equipo de cómputo y un *software* eficiente se facilita el uso de algún programa para integrar. Basta teclear la función que se desea integrar y el intervalo de integración para que el valor de la integral aparezca desplegado en el monitor.

Curvas integrales

No obstante, existe otra manera de vislumbrar primitivas o antiderivadas: gráficamente. Supongamos que queremos $\int x \, dx$. El caso es sencillo, la derivada de $(1/2)x^2 + c$ es x .

Vamos a jugar un poco con esta función para integrar gráficamente. Tomemos al integrando x , si le damos cierto valor constante k , lo que obtenemos es una recta paralela al eje Y , a una distancia k . Eso significa que la gráfica de la primitiva, al cruzar la recta $x = k$ deberá hacerlo con una pendiente $m = k$, es decir con un ángulo cuya tangente sea k . Por ejemplo, si proponemos $k = 1$ entonces $x = 1$ y la gráfica de la primitiva tendrá que pasar por cada punto $(1, y)$ con una inclinación de 45° . Si ahora proponemos $x = -1$, entonces la curva de la primitiva, al pasar por cada punto de la recta, es decir cada punto $(-1, y)$, tendrá que cruzarla con pendiente de -45° (figura 3).

Recordemos que la derivada de una función evaluada en un punto, corresponde a la pendiente que tendría la recta tangente de la función que se deriva, justamente en dicho punto.

El teorema fundamental del cálculo prácticamente estable-

ce que la derivada y la integral son operaciones inversas, de tal forma que resolver una integral implica encontrar una función que al derivarse se obtenga el integrando. Por lo que resulta que, efectivamente, dar valores arbitrarios al integrando es equivalente a adjudicar pendientes específicas a la primitiva que se busca. Así, las marcas en la figura 3 indican la forma en la que al graficar la primitiva, ésta cruzará las rectas $x = 1$ y $x = -1$.

En la figura 4, se muestra la gráfica para más valores de k en los números reales, aprovechando que el integrando en $\int x \, dx$ no tiene restricción en el conjunto de los números reales. Ahí se vislumbran muchas parábolas que nunca se enciman o se intersectan. Esto lo veremos si trazamos con un lápiz cada una de las líneas que unen las marcas que indican la dirección en cada punto del plano.

Pero ya se había mencionado que la integral de x es un medio de equis cuadrada más la constante, es decir: $\int x \, dx =$

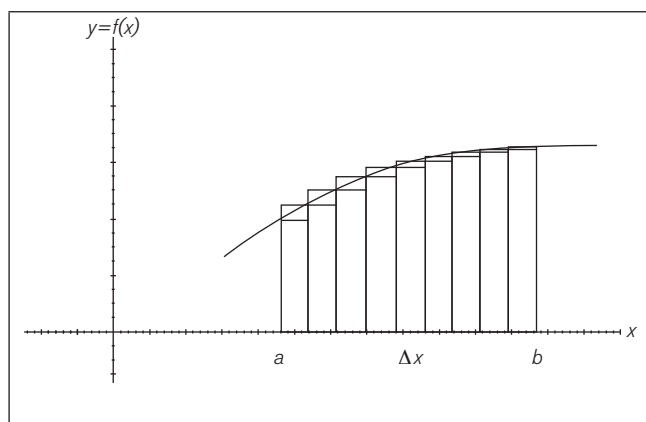


Figura 2. La integración numérica consiste en sumar áreas de figuras planas conocidas (rectángulo, trapecio, triángulo, etcétera).

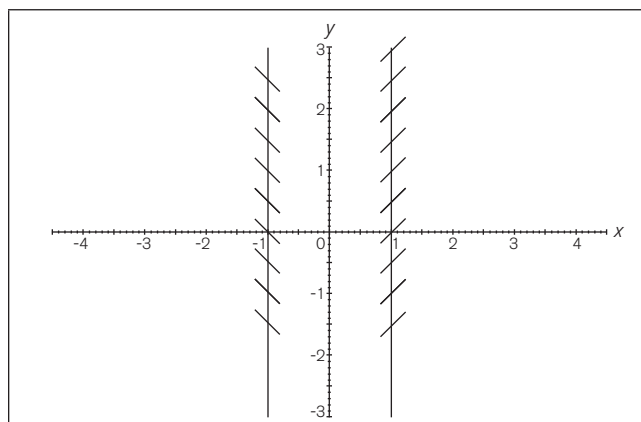


Figura 3. Pendientes de la gráfica primitiva $x = 1$ y $x = -1$.

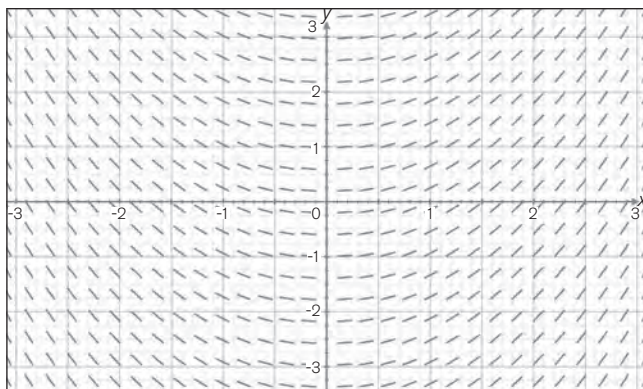


Figura 4. Direcciones en las que las primitivas van a cruzar las rectas que se generan al asignar valores al integrando x , es decir, pasan por todos los puntos del plano XY .



$(1/2)x^2 + c$, y precisamente el lado derecho de esta expresión matemática es una familia de parábolas como las del gráfico anterior.

Entonces podemos concluir que el proceso de graficado que se ha presentado es una técnica de integración gráfica, en donde cada parábola corresponderá a algún valor constante c cualquiera, siempre que pertenezca al conjunto de los números reales.

Las parábolas que descubrimos se denominan curvas integrales, y todos los vectores asociados a cada punto del plano representado en la figura anterior se denomina campo direccional.

Faltaría hacer referencia a esas rectas $x = k$, en las que dibujamos líneas con la misma inclinación o pendiente. Si cada punto de esas rectas tiene asociada un vector con la misma inclinación, entonces se llaman isoclinas.

Esta técnica de integración gráfica está bien documentada en textos de ecuaciones diferenciales y, construir el campo di-

reccional buscando los puntos del plano en los que se asocie la misma inclinación, se denomina método de las isoclinas. Cabe aclarar que para el trazo del campo direccional no es necesario reconocer las isoclinas; se puede hacer punto a punto, ya que finalmente lo que interesa es dibujar la dirección correspondiente en cada punto (x, y) .

Conclusión

Indudablemente, cuando se debe resolver una integral lo deseable es identificar plenamente la primitiva $F(x)$ tal que $D_x[F(x) + C] = f(x)$, donde $\int f(x) dx = F(x) + C$. Pero como ya se ha mencionado no siem-

pre es fácil descubrir $F(x)$ y a veces ni siquiera es posible —cuando el integrando no se puede expresar como combinación de funciones elementales—, de tal forma que reconocer las curvas integrales por medio de un campo direccional puede resultar muy valioso porque da una excelente idea del comportamiento de la primitiva.

Antiguamente la construcción de campos direccionales resultaba muy laboriosa, pero actualmente se ha agilizado mucho ese trabajo. Los campos direccionales son muy útiles en algunas ramas de las matemáticas, así como en otras ciencias cuyo desarrollo exige utilizar matemáticas. 



Gloria Elena Rubí Vázquez

Adina Jordan Aramburo

Facultad de Ciencias,

Manuel Moreno Mercado

Facultad de Ciencias Marinas,

Sergio Pou Alberú

Facultad de Ingeniería, Arquitectura y Diseño,
Universidad Autónoma de Baja California.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Boyce, William E. y Richard C. DiPrima. 2001. *Elementary differential equations and boundary value problems*. John Wiley & Sons, Nueva York.

Edwards, Henry y David Penney. 2008. *Cálculo con trascendentes tempranas*. Pearson Educación, México.

Zill, Dennis y Michael Cullen. 2006. *Ecuaciones diferenciales con problemas con valores en la frontera*. CENGAGE Learning, México.

IMÁGENES

Pp. 132-135: Frantisek Drtikol, Fotografías del autor, ca. 1923-29.